

Teoría de Modelos y Simulación

Enrique Eduardo Tarifa
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Jujuy

Introducción a la Simulación

Introducción

Cuando alguien tiene la responsabilidad de conducir un sistema dado, como por ejemplo: un banco, una ciudad, un sistema de transporte, etc., debe tomar continuamente decisiones acerca de las acciones que ejecutará sobre el sistema. Estas decisiones deben ser tales que la conducta resultante del sistema satisfaga de la mejor manera posible los objetivos planteados.

Para poder decidir correctamente es necesario saber cómo responderá el sistema ante una determinada acción. Esto podría hacerse por experimentación con el sistema mismo; pero factores de costos, seguridad y otros hacen que esta opción generalmente no sea viable. A fin de superar estos inconvenientes, se reemplaza el sistema real por otro sistema que en la mayoría de los casos es una versión simplificada. Este último sistema es el modelo a utilizar para llevar a cabo las experiencias necesarias sin los inconvenientes planteados anteriormente. Al proceso de experimentar con un modelo se denomina *simulación*. Al proceso de diseñar el plan de experimentación para adoptar la mejor decisión se denomina *optimización*. Si el plan de experimentación se lleva a cabo con el solo objeto de aprender a conducir el sistema, entonces se denomina *entrenamiento o capacitación*.

En este punto, es conveniente plantear las siguientes definiciones:

- **Sistema:** Conjunto de objetos o ideas que están interrelacionados entre sí como una unidad para la consecución de un fin (Shannon, 1988). También se puede definir como la porción del Universo que será objeto de la simulación.
- **Modelo:** Un objeto X es un modelo del objeto Y para el observador Z , si Z puede emplear X para responder cuestiones que le interesan acerca de Y (Minsky).
- **Simulación:** Simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a cabo experiencias con él, con la finalidad de aprender el comportamiento del sistema o de evaluar diversas estrategias para el funcionamiento del sistema (Shannon, 1988).

Aplicaciones de la simulación

La simulación es conveniente cuando:

- No existe una formulación matemática analíticamente resoluble. Muchos sistemas reales no pueden ser modelados matemáticamente con las herramientas actualmente disponibles, por ejemplo la conducta de un cliente de un banco.
- Existe una formulación matemática, pero es difícil obtener una solución analítica. Los modelos matemáticos utilizados para modelar un reactor nuclear o una planta química son imposibles de resolver en forma analítica sin realizar serias simplificaciones.

- No existe el sistema real. Es problema del ingeniero que tiene que diseñar un sistema nuevo. El diseño del sistema mejorará notablemente si se cuenta con un modelo adecuado para realizar experimentos.
- Los experimentos son imposibles debido a impedimentos económicos, de seguridad, de calidad o éticos. En este caso el sistema real esta disponible para realizar experimentos, pero la dificultad de los mismos hace que se descarte esta opción. Un ejemplo de esto es la imposibilidad de provocar fallas en un avión real para evaluar la conducta del piloto, tampoco se puede variar el valor de un impuesto a para evaluar la reacción del mercado.
- El sistema evoluciona muy lentamente o muy rápidamente. Un ejemplo de dinámica lenta es el problema de los científicos que estudian la evolución del clima. Ellos deben predecir la conducta futura del clima dadas las condiciones actuales, no pueden esperar a que un tornado arrase una ciudad para luego dar el mensaje de alerta. Por el contrario, existen fenómenos muy rápidos que deben ser simulados para poder observarlos en detalles, por ejemplo una explosión.

Entre las posibles desventajas de la simulación se pueden citar:

- El desarrollo de un modelo puede ser costoso, laborioso y lento.
- Existe la posibilidad de cometer errores. No se debe olvidar que la experimentación se lleva a cabo con un modelo y no con el sistema real; entonces, si el modelo está mal o se cometen errores en su manejo, los resultados también serán incorrectos.
- No se puede conocer el grado de imprecisión de los resultados. Por lo general el modelo se utiliza para experimentar situaciones nunca planteadas en el sistema real, por lo tanto no existe información previa para estimar el grado de correspondencia entre la respuesta del modelo y la del sistema real.

Actualmente la simulación presta un invaluable servicio en casi todas las áreas posibles, algunas de ellas son:

- **Procesos de manufacturas:** Ayuda a detectar cuellos de botellas, a distribuir personal, determinar la política de producción.
- **Plantas industriales:** Brinda información para establecer las condiciones óptimas de operación, y para la elaboración de procedimientos de operación y de emergencias.
- **Sistemas públicos:** Predice la demanda de energía durante las diferentes épocas del año, anticipa el comportamiento del clima, predice la forma de propagación de enfermedades.
- **Sistemas de transportes:** Detecta zonas de posible congestionamiento, zonas con mayor riesgo de accidentes, predice la demanda para cada hora del día.
- **Construcción:** Predice el efecto de los vientos y temblores sobre la estabilidad de los edificios, provee información sobre las condiciones de iluminación y condiciones ambientales en el interior de los mismos, detecta las partes de las estructuras que deben ser reforzadas.
- **Diseño:** Permite la selección adecuada de materiales y formas. Posibilita estudiar la sensibilidad del diseño con respecto a parámetros no controlables.
- **Educación:** Es una excelente herramienta para ayudar a comprender un sistema real debido a que puede expandir, comprimir o detener el tiempo, y además es capaz de brindar información sobre variables que no pueden ser medidas en el sistema real.
- **Capacitación:** Dado que el riesgo y los costos son casi nulos, una persona puede utilizar el simulador para aprender por sí misma utilizando el método más natural para aprender: el de prueba y error.

La importancia de la Simulación es evidente al considerar el impacto que tuvieron algunos trabajos, como ser:

- **La Perestroika:** Estudios de simulación efectuados en Rusia en las décadas del 70 y 80 convencieron a los dirigentes de la necesidad de plantear un fuerte cambio en la economía de ese país.
- **La caída de la bolsa de New York en 1988:** La utilización de programas de simulación por parte de los corredores de la bolsa causó una falsa inestabilidad que provocó la caída.
- **El regreso del Apolo 13:** La simulación jugó un rol fundamental en la determinación del plan de emergencia. La nave retornó con éxito a pesar de las graves averías.
- **Los Voyagers:** Gracias a la simulación se pudieron establecer los itinerarios óptimos para estas naves con un mínimo consumo de energía aprovechando la atracción gravitacional de los planetas.
- **Proyecto Monte Carlo:** Von Newman y Ulam (1945) emplearon simulación para estudiar reacciones nucleares.
- **Los modelos del planeta:** Algunos plantean la posibilidad de un calentamiento global debido al efecto invernadero. Otros plantean la posibilidad de un enfriamiento y predicen una nueva era glacial.
- **Capacitación de tropas:** En el operativo “Tormenta del desierto” llevado a cabo en la guerra contra Irak, las tropas de todas las fuerzas estadounidenses que participaron (fuerza aérea, marina y ejército) fueron entrenadas con simuladores.
- **Capacitación de policías:** Se utiliza entornos virtuales para que el policía aprenda a conducirse en situaciones de riesgo.
- **Simuladores de vuelos:** Fue una de las primeras aplicaciones de los simuladores. Actualmente se utilizan para entrenar pilotos de aviones comerciales y de combate.

Tipos de simulación

De acuerdo a la naturaleza del modelo empleado, la simulación puede ser por (Fishman, 1978):

- **Identidad:** Es cuando el modelo es una réplica exacta del sistema en estudio. Es la que utilizan las empresas automotrices cuando realizan ensayos de choques de automóviles utilizando unidades reales.
- **Cuasi-identidad:** Se utiliza una versión ligeramente simplificada del sistema real. Por ejemplo, los entrenamientos militares que incluyen movilización de equipos y tropas pero no se lleva a cabo una batalla real.
- **Laboratorio:** Se utilizan modelos bajo las condiciones controladas de un laboratorio. Se pueden distinguir dos tipos de simulaciones:
 - **Juego operacional:** Personas compiten entre ellas, ellas forman parte del modelo, la otra parte consiste en computadoras, maquinaria, etc. Es el caso de una simulación de negocios donde las computadoras se limitan a recolectar la información generada por cada participante y a presentarla en forma ordenada a cada uno de ellos.
 - **Hombre-Máquina:** Se estudia la relación entre las personas y la máquina. Las personas también forman parte del modelo. La computadora no se limita a recolectar información, sino que también la genera. Un ejemplo de este tipo de simulación es el simulador de vuelo.

- **Simulación por computadora:** El modelo es completamente simbólico y está implementado en un lenguaje computacional. Las personas quedan excluidas del modelo. Un ejemplo es el simulador de un sistema de redes de comunicación donde la conducta de los usuarios está modelada en forma estadística. Este tipo de simulación a su vez puede ser:
 - **Digital:** Cuando se utiliza una computadora digital.
 - **Analógica:** Cuando se utiliza una computadora analógica. En este grupo también se pueden incluir las simulaciones que utilizan modelos físicos.

El simulador por computadora

Este libro se centrará en la simulación por computadoras. Un simulador por computadora está compuesto por las siguientes partes:

- **Un modelo:** Es un modelo simbólico. Puede ser un conjunto de ecuaciones, reglas lógicas o un modelo estadístico.
- **El evaluador:** Es el conjunto de procedimientos que procesarán el modelo para obtener los resultados de la simulación. Puede contener rutinas para la resolución de sistemas de ecuaciones, generadores de números aleatorios, rutinas estadísticas, etc.
- **La interfaz:** Es la parte dedicada a interactuar con el usuario, recibe las acciones del mismo y presenta los resultados de la simulación en una forma adecuada. Esta unidad puede ser tan compleja como la cabina utilizada en los simuladores de vuelos profesionales.

Resolución analítica vs. simulación

Algunos modelos simbólicos pueden resolverse analíticamente. La ventaja de una solución analítica es que da una visión integral sobre la conducta del sistema. Variando sus parámetros es posible identificar fácilmente cambios importantes en el comportamiento, detectar puntos críticos y sacar conclusiones generales para el tipo de sistema analizado. Por ejemplo, la solución analítica del movimiento pendular permite concluir que el periodo (T) de cualquier péndulo es independiente de la posición inicial, pero depende de la longitud (l) del mismo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

En el caso del movimiento de un resorte, variando el coeficiente de fricción se puede identificar dos tipos de respuestas características: la oscilatoria (con fricción nula) y la oscilatoria amortiguada (con fricción no nula).

Cuando se desea calcular las raíces del polinomio cuadrático:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

se dispone de la siguiente solución analítica:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

Esta solución analítica permite calcular fácilmente las nuevas raíces cuando se varían los coeficientes del polinomio. También, es claro que habrá problemas cuando el argumento de la raíz cuadrada se haga negativo.

Sin embargo, no siempre es posible obtener una solución analítica, ya sea por la naturaleza del modelo o de los experimentos que se desean realizar. En este caso, el modelo deberá ser tratado por algún tipo de método numérico. Esto es, el modelo será resuelto para un caso particular, y la solución será un número, un vector o una matriz; pero no se tendrá una función analítica. Debido a esto, el análisis de los resultados es más complejo que el requerido por una solución analítica. A continuación se da un ejemplo utilizando la simulación de Monte Carlo.

Simulación de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es un método que emplea números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0,1]$ que es utilizado para resolver problemas donde la evolución con el tiempo no es de importancia. A continuación, se analizarán dos ejemplos para comparar una solución analítica con una solución obtenida por simulación.

Determinación del área de una figura

Cuando se desea calcular el área de un círculo de radio $r = 10$ cm no existen mayores problemas, ya que tanto el área a como su perímetro p pueden evaluarse analíticamente con las siguientes fórmulas:

$$a = \frac{p^2}{4\pi} \quad (4)$$

$$p = 2\pi r \quad (5)$$

En este caso la solución es $a = 314.16 \text{ cm}^2$ y $p = 62.83 \text{ cm}$.

Sin embargo, cuando se desea determinar el área de una forma irregular, por ejemplo la superficie plana de Argentina, el problema debe necesariamente ser resuelto con un método numérico; es decir, simulación. La determinación del área del círculo utilizando la simulación de Monte Carlo implica la siguiente secuencia:

1. Crear un cuadrado de lado $2r$ que encierre al círculo (Figura 1).
2. Colocar n puntos al azar dentro del cuadrado.
3. Asignar a c el número de puntos que quedaron dentro del círculo.
4. Como la probabilidad de colocar un punto dentro del círculo es igual al cociente del área del círculo dividida el área del cuadrado, el área del círculo se puede estimar en función del área del cuadrado (fácilmente calculable) con:

$$a_{\text{círculo}} = \frac{c}{n} a_{\text{cuadrado}} = \frac{c}{n} (4r^2) \quad (6)$$

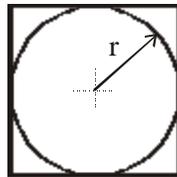


Figura 1: Determinación del área de un círculo

Es importante notar que para un dado n , el resultado será distinto cada vez que se realice la simulación. Es decir, que el resultado será un número aleatorio. A medida que n aumente, la

varianza del resultado disminuirá y el valor medio se aproximará a la solución analítica. Para un $n = 100$, el resultado de una simulación es 320 cm^2 ; mientras que para $n = 10000$, un resultado es 313 cm^2 .

El mismo principio se puede aplicar para figuras complejas como se muestra en la Figura 2. Conociendo la escala, se puede fijar un cuadrado arbitrario y calcular el área de Argentina. Sin embargo, la determinación del perímetro de la figura es un problema de mayor magnitud para el cual se necesita recurrir a la teoría de fractales.



Figura 2: Determinación del área de una figura compleja.

Evaluación de integrales

Suponga que se desea evaluar la siguiente integral que no tiene solución analítica:

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (7)$$

Si bien para este caso en particular existen mejores métodos para hacerlo, cuando se deben resolver integrales múltiples con integrandos mal condicionados la simulación de Monte Carlo puede ser una buena alternativa.

Suponga que x es un número aleatorio con distribución uniforme continua en el intervalo $[a,b]$, $f(x)$ es la correspondiente función de densidad de probabilidad que es igual a $1/(b-a)$; entonces, el número $y = g(x)$ es también un número aleatorio cuyo valor medio ($E(y)$ o μ_y) está dado por:

$$E(y) = \int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx = \frac{I}{b-a} \quad (8)$$

Por lo tanto:

$$I = (b-a)E(y) \quad (9)$$

Sin embargo, $E(y)$ no es conocido; sólo puede ser estimado con el promedio de una muestra. Por el mismo motivo, I sólo puede ser estimado por el número aleatorio Y que se calcula de la siguiente manera:

$$Y = (b-a) \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = (b-a) \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n} \quad (10)$$

Note que $E(Y) = I$ y $\text{Var}(Y) = (b-a) \cdot \text{Var}(y)/n$, donde $\text{Var}(y)$ (o σ_y^2) es la varianza de y .

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos para la siguiente integral:

$$I = \int_0^p \text{sen}(x) dx \quad (11)$$

La solución analítica es igual a 2.

Tabla 1: Integral con simulación de Monte Carlo.

<i>n</i>	10	20	40	80	160
<i>Y</i>	2.213	1.951	1.948	1.989	1.993

Etapas de una simulación

En el desarrollo de una simulación se pueden distinguir las siguientes etapas (Banks *et al.*, 1996):

- **Formulación del problema:** En este paso debe quedar perfectamente establecido el objeto de la simulación. El cliente y el desarrollador deben acordar lo más detalladamente posible los siguientes factores: los resultados que se esperan del simulador, el plan de experimentación, el tiempo disponible, las variables de interés, el tipo de perturbaciones a estudiar, el tratamiento estadístico de los resultados, la complejidad de la interfaz del simulador, etc. Se debe establecer si el simulador será operado por el usuario o si el usuario sólo recibirá los resultados. Finalmente, se debe establecer si el usuario solicita un trabajo de simulación o un trabajo de optimización.
- **Definición del sistema:** El sistema a simular debe estar perfectamente definido. El cliente y el desarrollador deben acordar dónde estará la frontera del sistema a estudiar y las interacciones con el medioambiente que serán consideradas.
- **Formulación del modelo:** Esta etapa es un arte y será discutida más adelante. La misma comienza con el desarrollo de un modelo simple que captura los aspectos relevantes del sistema real. Los aspectos relevantes del sistema real dependen de la formulación del problema; para un ingeniero de seguridad los aspectos relevantes de un automóvil son diferentes de los aspectos considerados por un ingeniero mecánico para el mismo sistema. Este modelo simple se irá enriqueciendo como resultado de varias iteraciones.
- **Colección de datos:** La naturaleza y cantidad de datos necesarios están determinadas por la formulación del problema y del modelo. Los datos pueden ser provistos por registros históricos, experimentos de laboratorios o mediciones realizadas en el sistema real. Los mismos deberán ser procesados adecuadamente para darles el formato exigido por el modelo.
- **Implementación del modelo en la computadora:** El modelo es implementado utilizando algún lenguaje de computación. Existen lenguajes específicos de simulación que facilitan esta tarea; también, existen programas que ya cuentan con modelos implementados para casos especiales.
- **Verificación:** En esta etapa se comprueba que no se hayan cometido errores durante la implementación del modelo. Para ello, se utilizan las herramientas de *debugging* provistas por el entorno de programación.
- **Validación:** En esta etapa se comprueba la exactitud del modelo desarrollado. Esto se lleva a cabo comparando las predicciones del modelo con: mediciones realizadas en el sistema real, datos históricos o datos de sistemas similares. Como resultado de esta etapa puede surgir la necesidad de modificar el modelo o recolectar datos adicionales.
- **Diseño de experimentos:** En esta etapa se decide las características de los experimentos a realizar: el tiempo de arranque, el tiempo de simulación y el número de simulaciones. No se debe incluir aquí la elaboración del conjunto de alternativas a probar para seleccionar la mejor, la elaboración de esta lista y su manejo es tarea de la optimización y no de la simulación. Debe quedar claro cuando se formula el problema si lo que el cliente desea es un estudio de simulación o de optimización.

- **Experimentación:** En esta etapa se realizan las simulaciones de acuerdo el diseño previo. Los resultados obtenidos son debidamente recolectados y procesados.
- **Interpretación:** Se analiza la sensibilidad del modelo con respecto a los parámetros que tienen asociados la mayor incertidumbre. Si es necesario, se deberán recolectar datos adicionales para refinar la estimación de los parámetros críticos.
- **Implementación:** Conviene acompañar al cliente en la etapa de implementación para evitar el mal manejo del simulador o el mal empleo de los resultados del mismo.
- **Documentación:** Incluye la elaboración de la documentación técnica y manuales de uso. La documentación técnica debe contar con una descripción detallada del modelo y de los datos; también, se debe incluir la evolución histórica de las distintas etapas del desarrollo. Esta documentación será de utilidad para el posterior perfeccionamiento del simulador.

Sistemas

Un sistema es una sección de la realidad que es el foco primario de un estudio y está compuesto de componentes que interactúan con otros de acuerdo a ciertas reglas dentro de una frontera identificada para el propósito del estudio. Un sistema puede realizar una función que no es realizable por sus componentes individuales.

Los objetos o componentes que forman parte del sistema se denominan *entidades*, por ejemplo: un auto está compuesto por un motor, ruedas, carrocería, etc. Estas entidades poseen propiedades denominadas *atributos*, por ejemplo: la potencia del motor, y se relacionan entre sí a través de *relaciones* o *funciones*. Estas relaciones pueden ser:

- Estáticas o estructurales: un auto posee cuatro ruedas.
- Dinámicas o funcionales: un auto consume nafta si se enciende el motor.

Los valores asumidos por los atributos de las entidades en un momento dado determinan el *estado* del sistema. El estado puede ser *estático* o *estacionario*, esto significa que se mantiene constante en el tiempo; o por el contrario, puede ser *dinámico* o *transitorio* si evoluciona con el tiempo. Un sistema puede presentar los dos tipos de conductas; generalmente, cuando inicia su funcionamiento pasa por un estado dinámico y luego alcanza un estado estacionario o de régimen.

Un estado estacionario es *estable* si el sistema retorna a él luego de una perturbación. Por el contrario, un estado estacionario es *inestable* si el sistema se aleja de él luego de una perturbación. Este alejamiento puede dar lugar a una respuesta *acumulativa* (crece o decrece continuamente, o alcanza otro estado estacionario) o a una respuesta *oscilatoria* (crece y decrece continuamente). Un ejemplo de estado estable, es un péndulo en su posición de reposo; en cambio, el péndulo invertido es un ejemplo de estado inestable. Si el péndulo no tiene fricción, la respuesta a una perturbación será oscilatoria; en cambio, si existe fricción la respuesta será amortiguada.

Los atributos también se denominan variables o parámetros (Figura 3). Los *parámetros* (*P*) son atributos que se fijaron durante el diseño del sistema ya sea por el diseñador o por la naturaleza, por ejemplo: la cilindrada del motor, la aceleración de la gravedad. Las variables se clasifican a su vez en:

- **Variables de entrada o exógenas:** Son fijadas por el medioambiente del sistema. Pueden ser manipulables (*U*) -se fijan a voluntad- o no (*D*). Un ejemplo del primer

caso es la posición del pedal del acelerador, y del segundo caso es la velocidad del viento. Una variable de entrada no manipulable se denomina perturbación.

- **Variables de salida (Y):** Son las variables de estado, o combinación de ellas, que son medidas o traspasan la frontera del sistema.
- **Variables internas:** Son las variables del sistema que no son ni de entrada, ni de salida, ni parámetros.
- **Variables de estado (X):** Conforman el conjunto *mínimo* de variables internas del sistema necesarias para describir completamente su estado interno.

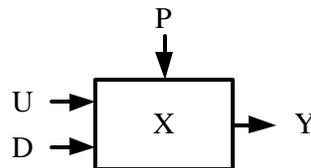


Figura 3: Variables de un sistema.

A continuación se analiza el calentador eléctrico de agua mostrado en la Figura 4, se supone que la potencia del mismo no es suficiente para llegar al punto de ebullición. La clasificación correspondiente es:

- **Parámetros:** el voltaje V , la resistencia R_c , las dimensiones del recipiente, el coeficiente global de transferencia de calor U , la capacidad calorífica del agua C_p , el espesor del cable, etc.
- **Variables de entrada manipulables:** la posición del interruptor p , el caudal de la corriente de entrada F_e y su temperatura T_e , el caudal de la corriente de salida F_s .
- **Variables de salida:** la temperatura T_m indicada por el termómetro, la potencia disipada W_d , la temperatura de la corriente de salida T_s .
- **Variables de estado:** la masa de agua M , la temperatura del líquido T . Note que la intensidad I y la potencia de calentamiento W son variables internas del sistema; pero no son de estado porque pueden calcularse a partir del resto de las variables. Entonces, ellas no pertenecen al conjunto mínimo de variables que deben ser especificado y, por lo tanto, no son variables de estado. En cambio, los valores iniciales de M y T deben ser especificados para que el estado del sistema quede completamente determinado.
- **Perturbaciones:** la temperatura ambiente T_a .

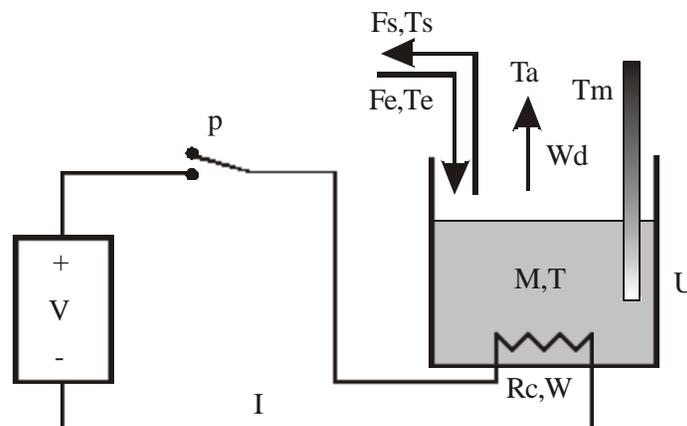


Figura 4: Calentador eléctrico.

Durante la operación del sistema se podrán observar los siguientes estados:

- Estado inicial: El interruptor está abierto, el recipiente vacío, no entra ni sale líquido. El estado del sistema no varía durante esta etapa. Es un estado estacionario.
- Carga de agua: Se hace $F_e > 0$, el recipiente recibe agua y M aumenta continuamente durante esta etapa. Es un estado dinámico.
- Recipiente lleno: Cuando el nivel del agua es el deseado se interrumpe la alimentación. Nuevamente el sistema está en un estado estacionario.
- Calentamiento: Una vez alcanzado el nivel de agua deseado, se cierra el interruptor. La temperatura T del agua aumenta continuamente. Es un estado dinámico.
- Régimen: a medida que aumenta la temperatura del sistema, la potencia disipada hacia el exterior W_d también aumenta. Esta potencia además depende de T_a , de las dimensiones del recipiente y de U . Cuando la potencia disipada iguala a la potencia W de calentamiento, la temperatura del sistema adopta también un valor constante. De este modo, el sistema alcanza un nuevo estado estacionario.
- Descarga de agua: Alcanzada la temperatura deseada y mantenida durante el tiempo requerido, se abre el interruptor y el sistema se descarga haciendo $F_s > 0$. M disminuye continuamente hasta valer cero. La temperatura también disminuye. Se trata de un estado dinámico que culmina cuando el sistema está completamente vacío retornando a su estado inicial.

Clasificación de sistemas

De acuerdo a su naturaleza, un sistema puede ser (Law and Kelton, 1991):

- **Determinístico:** Si el sistema no contiene ningún elemento aleatorio es un sistema determinístico. En este tipo de sistema, las variables de salidas e internas quedan perfectamente determinadas al especificar las variables de entrada, los parámetros y las variables de estado. Es decir, las relaciones funcionales entre las variables del sistema están perfectamente definidas. El calentador eléctrico estudiado es un sistema determinístico.
- **Estocástico:** En este caso algún elemento del sistema tiene una conducta aleatoria. Entonces, para entradas conocidas no es posible asegurar los valores de salida. Un ejemplo de sistema estocástico es una máquina tragamonedas en la cual una misma acción (tirar la palanca) genera un resultado incierto (ganar o perder). Cuando un sistema determinístico es alimentado con entradas estocásticas, la respuesta del sistema es también estocástica. Por ejemplo, la temperatura ambiente es una variable estocástica que afecta la respuesta del calentador eléctrico. En el mundo real, los sistemas siempre tienen elementos estocásticos ya sea por su propia naturaleza o porque son fenómenos no comprendidos actualmente; por ejemplo, a un cavernícola le podía parecer que las eclipses eran fenómenos aleatorios, hoy ellas son predichas. Sin embargo, se puede considerar a un sistema real con un sistema determinístico si su incertidumbre es menor que un valor aceptado.
- **Continuo:** Se tiene un sistema continuo cuando las relaciones funcionales entre las variables del sistema sólo permiten que el estado evolucione en el tiempo en forma continua (basta que una variable evolucione continuamente). Matemáticamente, el estado cambia en infinitos puntos de tiempo. El recipiente del calentador es un subsistema continuo porque tanto M como T evolucionan en forma continua durante la operación del sistema.
- **Discreto:** Se tiene un sistema discreto cuando las relaciones funcionales del sistema sólo permiten que el estado *varíe* en un conjunto finito (contable) de puntos temporales. Las causas instantáneas de los cambios de estados se denominan *eventos*.

El interruptor del calentador es un subsistema discreto porque la intensidad I sólo puede variar en los instantes que se abre o se cierra el interruptor. La apertura y el cierre del interruptor son eventos. Un sistema continuo puede comportarse en forma discreta si las entradas son discretas. Los sistemas reales son combinaciones de continuos y discretos. La forma de tratarlos se adopta de acuerdo a la característica dominante.

Modos de simulación

Como ya se planteó anteriormente, cuando se simula se experimenta con un modelo para obtener ciertos resultados. Un modelo es también un sistema, y de acuerdo al tipo de variables de salida del modelo el modo de simulación será (Figura 5):

- **Análisis:** Es el modo más empleado, en él las variables de salida del modelo representan a las variables de salida del sistema real. Este modo se utiliza para estimar la respuesta del sistema real ante entradas especificadas. Debido a que imita un sistema que realmente funciona, el modelo es matemáticamente más estable y se asegura la existencia de una solución.
- **Diseño:** En este modo las salidas del modelo representan a los parámetros del sistema real. Se utiliza en la etapa de diseño de un equipo donde el problema es determinar los parámetros para los cuales el sistema producirá las salidas deseadas para las entradas especificadas.
- **Control:** Las variables de salida del modelo representan a las variables de entrada del sistema real. Este modo sirve para determinar los valores que deberán adoptar las entradas del sistema para producir los resultados deseados. Se utiliza cuando se desea determinar las condiciones de operación de un sistema.

Por lo general, los simuladores se operan en modo diseño dejando al usuario la tarea de iterar para obtener los resultados provistos por los otros modos. Por ejemplo, para estimar el voltaje requerido para el calentador (modo diseño), se pueden realizar varias simulaciones en modo análisis para un conjunto de valores de voltaje, y se selecciona el que produce la salida deseada.

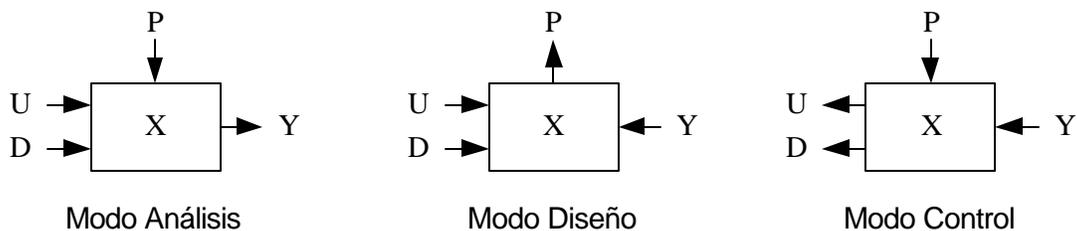


Figura 5: Modos de simulación.

Modelado

Modelado es el proceso de construcción de un modelo. Un modelo es una representación de un objeto, sistema, o idea. Usualmente, su propósito es ayudar explicar, entender o mejorar un sistema (Shannon, 1988). Los modelos son útiles para:

- El pensamiento: Al construir un modelo necesariamente se debe ordenar y completar el conocimiento que del sistema real se posee.

- La comunicación: Un modelo elimina la ambigüedad del lenguaje para comunicarse con expertos.
- El entrenamiento y la instrucción: Un modelo puede ser utilizado para entrenar con costo y riesgo casi nulos. Por ejemplo, los submarinos a escala utilizados por la marina alemana para entrenar en secreto antes de la segunda guerra mundial; o también, el sistema de barcos a escalas utilizados actualmente en Francia para entrenar a los capitanes de barcos petroleros.
- La predicción: Un modelo sirve para predecir la conducta del sistema real. Es el caso de los modelos utilizados para predecir, mediante simulación, la evolución del clima mundial. El modelo de la teoría de la relatividad predice, sin hacer una simulación, que no es posible superar la velocidad de la luz.
- La experimentación: La experimentación con un modelo es barata y segura. Se emplea frecuentemente en el diseño de un sistema; por ejemplo, las pruebas que se realizan en un túnel de viento con un modelo a escala de un avión o de un automóvil.

El modelado es un arte. Cualquier conjunto de reglas para desarrollar modelos tiene una utilidad limitada y sólo puede servir como una guía sugerida. El arte de modelar consiste en la habilidad para analizar un problema, resumir sus características esenciales, seleccionar y modificar las suposiciones básicas que caracterizan al sistema, y luego enriquecer y elaborar el modelo hasta obtener una aproximación útil. Los pasos sugeridos para este proceso son:

1. Establecer una definición clara de los objetivos.
2. Analizar el sistema real.
3. Dividir el problema del sistema en problemas simples.
4. Buscar analogías.
5. Considerar un ejemplo numérico específico del problema.
6. Determinar las variables de interés.
7. Escribir los datos obvios.
8. Escribir las ecuaciones teóricas o empíricas que describen los fenómenos presentes y relacionan las variables de interés.
9. Si se tiene un modelo manejable, enriquecerlo. De otra manera, simplificarlo.

Generalmente, simplificar un modelo implica:

- Convertir variables en constantes.
- Eliminar o combinar variables.
- Suponer linealidad.
- Agregar suposiciones más potentes y restricciones.
- Restringir los límites del sistema.

Para enriquecerlo se procede de la forma contraria. Durante el proceso de modelado se debe alcanzar un equilibrio entre el grado de detalle y el riesgo de falta de exactitud. El mejor modelo, es el modelo más simple que puede resolver el problema con el grado de exactitud requerido.

Un modelo debe ser:

- Fácil de entender por parte del usuario.
- Dirigido a metas u objetivos.
- Sensato, en cuanto no de respuestas absurdas.
- Fácil de manipular y controlar por parte del usuario. Es decir, debe ser sencillo comunicarse con el modelo.

- Completo, en lo referente a asuntos importantes.
- Adaptable, con un sencillo procedimiento para modificar o actualizar el modelo.
- Evolutivo, debe ser sencillo al principio y volverse más complejo en el tiempo.

A modo de ejemplo de lo planteado, considere que se desea construir un modelo para determinar el tiempo y la velocidad de contacto con el suelo de un paracaidista. El objetivo ya está planteado. El sistema será el paracaidista. Las características esenciales serán la velocidad de descenso, la fuerza de fricción, la altura inicial, etc. A fin de mantener el modelo en la forma más simple posible se supondrá despreciable la variación de la aceleración de la gravedad con respecto a la altura, se supondrá despreciable también la elevación de la temperatura provocada por la fricción, se supondrá un cuerpo estándar para el paracaidista, etc. Luego, se determinarán las variables que representan a las características esenciales: v , Fr , h_0 , etc. El paso siguiente será formular las ecuaciones que vinculen dichas variables, como por ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -g + \frac{Fr}{m} \\ \frac{dh}{dt} &= v \\ Fr &= Crv^2\end{aligned}\tag{12}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, h es la altura, m es la masa del paracaidista, t es el tiempo, y Cr es el coeficiente de fricción.

El modelo es manejable, pero se puede simplificar si es que se determina que la velocidad terminal (la que equilibra el peso con la fuerza de fricción) se alcanza pronto. Si esto es así, se podrá utilizar un modelo más simple considerando que la velocidad es constante.

Clasificación de modelos

Como ya fue planteado, un modelo es también un sistema; por lo tanto valen todas las definiciones y clasificaciones que se establecieron anteriormente. Debido a que un modelo es una simplificación o abstracción de un sistema real, no es necesario, salvo en los aspectos relevantes, que el modelo guarde una total correspondencia con el sistema real. Entonces, habrá casos en que será conveniente utilizar un modelo discreto para modelar un sistema continuo (por ejemplo, la integración numérica de una función utilizando la regla del trapecio), o utilizar un modelo estocástico para modelar un sistema determinístico (por ejemplo, la determinación del área de un figura utilizando la simulación de Monte Carlo), y todas las combinaciones posibles.

Modelos teóricos vs. experimentales

Si el modelo que se construye sólo se orienta a reproducir las salidas del sistema real sin intentar modelar su comportamiento interno; entonces, será un modelo experimental o de caja negra. En cambio, si el modelo también intenta reproducir las relaciones funcionales del sistema será un modelo con base teórica. Un modelo experimental requiere una gran cantidad de datos para poder calibrarlo o ajustarlo correctamente, y su rango de validez está limitado a este conjunto de datos. En contraposición, un modelo teórico requiere una cantidad menor de datos y puede ser utilizado fuera del rango de los mismos ya que el rango de validez del modelo está dado por la teoría utilizada y no por los datos.

Un ejemplo simple se presenta cuando se desea determinar el espacio recorrido por un cuerpo móvil a velocidad constante en función del tiempo. Para una velocidad dada, se puede construir una gráfica de espacio vs. tiempo a partir de medidas experimentales. Esta gráfica sólo podrá emplearse para el caso en que la velocidad del móvil sea idéntica a aquella que se utilizó en los experimentos. Además, sólo proveerá información para los tiempos que pertenezcan al intervalo de experimentación. Estos problemas no se presentan si se utiliza un modelo teórico simple: $e = v.t$; ni siquiera son necesarios los datos experimentales.

Para el calentador de agua se puede construir un modelo experimental que permita estimar el tiempo de calentamiento requerido para calentar una cantidad dada de agua hasta una temperatura deseada. Para ello será necesario medir la temperatura Tm_i en N determinados instantes t_i y luego ajustar gráficamente una curva t vs. Tm , o ajustar matemáticamente con el criterio de mínimos cuadrados los coeficientes a de un polinomio $P(a,t)$ resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min}_a \sum_{i=1}^N (P(a, Tm_i) - t_i)^2 \quad (13)$$

Luego, el tiempo requerido para alcanzar una temperatura especificada será dado por este polinomio ya ajustado.

Un problema del modelo anterior es que se torna totalmente inútil cuando se cambia la cantidad de agua en el recipiente. Este problema puede ser resuelto incorporando la variable M al modelo; pero serán necesarios nuevos datos experimentales para distintos valores de M . La incorporación de más variables puede llegar a hacer necesario que se reemplace el polinomio por un modelo más potente como por ejemplo una red neuronal. Otro problema es que el modelo no puede ser utilizado para temperaturas que estén fuera del intervalo de las temperaturas de los datos experimentales. Un modelo con base teórica requeriría mucho menos experimentos, o quizás ninguno, y el rango de temperatura posibles sería mayor.

Modelos de caja negra

Debido a las limitaciones del conocimiento actual o por la complejidad involucrada, todo modelo con base teórica siempre tiene una parte con base empírica. En efecto, debido a que no existe una teoría apropiada o su implementación es demasiado compleja, siempre es necesario recurrir a experimentos para determinar el valor de algún parámetro o definir alguna relación entre las variables.

En el caso del calentador de agua, se puede desarrollar un modelo con base teórica que considere la ley de Ohm, las leyes de Kirchhoff, el efecto Joule, etc. Sin embargo, la capacidad calorífica C_p del agua generalmente es estimada utilizando un polinomio que es función de la temperatura T . Éste es un modelo de caja negra ya que sólo modela la relación existente entre la entrada T y la salida C_p sin contemplar los mecanismos internos; además, es necesario llevar a cabo experimentos para establecer los valores de los coeficientes del polinomio.

Cuando se desarrolla un modelo estadístico, se puede utilizar un sinnúmero de funciones teóricas de distribución; pero invariablemente será necesario determinar algún parámetro en forma experimental, como por ejemplo el valor medio y la varianza de la muestra.

El modelo de caja negra más simple es un polinomio. Si el orden del mismo ya está fijado, el problema se reduce a determinar los valores de los coeficientes que minimicen la sumatoria de los cuadrados de los errores, tal como se planteó en la sección anterior. Si el orden del polinomio debe también ser determinado, entonces el orden óptimo y los coeficientes surgen de minimizar la varianza de los errores de la muestra, es decir de resolver el siguiente problema de optimización más general:

$$\begin{aligned}
 & \underset{M, a}{\text{Min}} S^2 \\
 & \text{s.a:} \\
 & S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - P(M, a, x_i))^2}{N - M - 1}
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde se desea ajustar los coeficientes a y el orden M del polinomio P que es función de x para que los valores devueltos minimicen la varianza de los errores de una muestra con N puntos experimentales (x_i, y_i) .

Por ejemplo, dada la siguiente tabla de datos:

Tabla 2: Tabla de datos.

x_i	y_i
0	8
1	14
4	80
9	385
10	485
14	945
15	1095

Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos cuando se ajustaron polinomios de orden 0 a 4. El orden 4 se realizó sólo como verificación. Como puede apreciarse, el mejor ajuste se obtiene con el polinomio de orden 2. La Figura 6 muestra el ajuste lineal y cuadrático realizado para estos datos.

Tabla 3: Ajuste de promedio $P(x) = a$.

x_i	y_i	$P(x_i)$	$(P(x_i)-y_i)^2$
0	8	430.285713	178325.223
1	14	430.285713	173293.794
4	80	430.285713	122700.08
9	385	430.285713	2050.79576
10	485	430.285713	2993.65325
14	945	430.285713	264930.798
15	1095	430.285713	441845.084
S $(P(x_i)-y_i)^2 =$			1186139.43
S ² =			197689.90

a = 430.29

Tabla 4: Ajuste lineal $P(x) = a x + b$.

x_i	y_i	$P(x_i)$	$(P(x_i)-y_i)^2$
0	8	-108.716392	13622.7163

a = 71.19

1	14	-37.5274306	2655.0761	b=	-108.72
4	80	176.039455	9223.57691		
9	385	531.984264	21604.3739		
10	485	603.173226	13964.9114		
14	945	887.929073	3257.09065		
15	1095	959.118035	18463.9083		
S			(P(x_i)-y_i)² =	82791.6535	
			S² =	16558.33	

Tabla 5: Ajuste cuadrático $P(x) = a x^2 + b x + c$.

x_i	y_i	P(x_i)	(P(x_i)-y_i)²		
0	8	10.0872009	4.35640772	a=	5.00
1	14	12.2130497	3.19319146	b=	-2.87
4	80	78.5633996	2.06382077	c=	10.09
9	385	389.056662	16.4565037		
10	485	481.141716	14.8863562		
14	945	949.436606	19.6834699		
15	1095	1091.499	12.2570268		
S			(P(x_i)-y_i)² =	72.8967766	
			S² =	18.22	

Tabla 6: Ajuste cúbico $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$.

x_i	y_i	P(x_i)	(P(x_i)-y_i)²		
0	8	8.74519553	0.55531638	a=	0.02
1	14	12.6470264	1.83053753	b=	4.62
4	80	80.8057072	0.64916416	c=	-0.74
9	385	388.397437	11.5425803	d=	8.75
10	485	479.887368	26.1390075		
14	945	948.983835	15.8709448		
15	1095	1092.52686	6.11643007		
S			(P(x_i)-y_i)² =	62.7039808	
			S² =	20.90	

Tabla 7: Ajuste de orden 4 $P(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$.

x_i	y_i	P(x_i)	(P(x_i)-y_i)²		
0	8	9.03207003	1.06516856	a=	0.00
1	14	12.2682245	2.99904626	b=	-0.03
4	80	80.8087961	0.6541512	c=	5.01
9	385	388.71443	13.796989	d=	-1.75
10	485	479.816645	26.8671729	e=	9.03
14	945	948.395223	11.5275423		
15	1095	1092.95794	4.17000636		
S			(P(x_i)-y_i)² =	61.0800766	
			S² =	30.54	

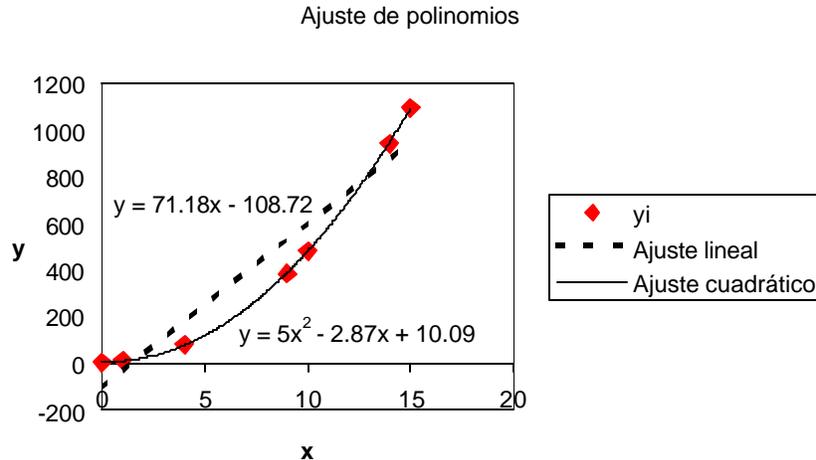


Figura 6: Ajuste polinomial.

Cuando el problema involucra más de una variable independiente se suele dejar de lado el polinomio a favor de una función que tenga alguna base teórica o empírica. Este es el caso de los modelos estadísticos donde las funciones a ajustar no son polinomios. La ley de los gases ideales es otro ejemplo.

Si los errores de los datos experimentales son despreciables y si se pueden despreciar también los errores de una interpolación lineal o cuadrática dentro de los intervalos de la muestra; entonces, es posible utilizar como modelo directamente la tabla de datos experimentales (x,y) a partir de la cual para un x dado se estimará el correspondiente y utilizando una interpolación lineal o cuadrática.

Si no es posible ajustar los datos experimentales utilizando un polinomio, una función o una tabla; entonces, puede ser conveniente recurrir a un modelo más complejo como es el caso de una red neuronal. Las mismas son utilizadas para modelar sistemas con múltiples variables y fuertemente no lineales.

Bibliografía

- Banks J., Carson J.S., Nelson B.L., 1996, "Discrete-Event System Simulation. Second Edition.", Prentice-Hall, New Jersey.
- Fishman G.S., 1978, "Conceptos y métodos en la simulación digital de eventos discretos", Limusa, México.
- Kelton W.D., Sadowski R.P., Sadowski D.A., 1998, "Simulation with Arena", Mc Graw Hill, Boston.
- Ogunnaike B.A., Harmon Ray W., 1994, "Process Dynamics, Modeling and Control", Oxford, New York.
- Shannon R.E., 1988, "Simulación de Sistemas. Diseño, desarrollo e implementación", Trillas, México.
- Law A.M., Kelton W.D., 1991, "Simulation Modeling & Analysis", Second Edition, McGraw-Hill, New York.